Estimación del número de cuños empleados en una acuñación, según el número de cuños distintos aparecidos en los hallazgos de monedas antiguas

FRANCISCO-JAVIER MORA MAS *

La presente comunicación procura un procedimiento estadístico matemático para resolver el problema de la estimación de la zona de variación para el desconocido número real de cuños que se emplearon en una acuñación, a partir del número de cuños distintos identificados en una muestra de monedas de la referida acuñación. El procedimiento resulta de la aplicación de los procesos estocásticos de las cadenas de Markov, empleando el ordenador como medio de cálculo. Los resultados se expresan habiendo determinado unos límites de confianza, de manera que luego es posible establecer cuando las diferencias son significativas.

Se efectúa una aplicación sobre unos hallazgos de Denarios referidos y comentados en una publicación de Leandro Villaronga, esperando que la nueva información estadística pueda contribuir a la formulación satisfactoria de hipótesis sobre las posibles circunstancias en torno a los hallazgos en cuestión.

1) Introducción

Una noble y sana ocupación de las personas lo constituye la investigación y el estudio de la verdad; cuando se han disipado las dudas y se alcanza la evidencia de lo que es cierto, o sea, cuando se logra desvelar la propia verdad, se tiene una gran satisfacción. Los muchos cuerpos de conocimientos científicos que existen hoy día, nacieron y se desarrollaron gracias al continuo afán de investigación de la verdad; y para aumentarla paso a paso, se recurre a todos los medios que pueden ser manipulados con la razón. El análisis estadístico de los hechos acaecidos constituye uno de los medios auxiliares de la investigación; tiene la especial particularidad de que su aplicación es prácticamente universal en los variados y extensos campos de las ciencias; se emplea en las ciencias sociales, en la medicina o la biología, en la técnica, etc.; y además podemos decir que la estadística se halla íntimamente asociada con la esencia física de la naturaleza material.

* Miembro de la *Sociedad Española de Investigación Operativa, Estadística e Informática.*

Tenemos también la certeza de que la estadística, con sus procedimientos, puede contribuir favorablemente a la resolución de cuestiones numimásticas que implican aleatoriedad.

Esta comunicación contiene una aplicación de los procedimientos estadísticos apriorísticos a la Numismática; trata sobre un problema bien concreto que ya ha sido planteado y examinado por otros autores, lo cual certifica el interés de la cuestión (1); interés que creemos aumentado por cuanto entendemos que se aporta una correcta solución exacta a la cuestión.

El problema esencial consiste en la determinación del punto de estimación estadística del número de cuños que se emplearon en una acuñación de monedas, a partir del examen de una o varias muestras formadas al azar de monedas de la referida acuñación.

Por ejemplo, en una muestra de 10 monedas se pueden haber identificado 7 cuños de anverso distintos; observándose como algunos aparecen una sola vez mientras que otros repiten su presencia en cantidades variables; pero además podemos suponer lógicamente la posible existencia de otros cuños que no hayan tenido la suerte favorable de aparecer en la muestra. La pregunta que nos formulamos consiste en saber cuántos puedan ser los cuños no identificados; en resumen, se trata de saber cuál es el número más probable para la cantidad de cuños de la acuñación. Si designamos por «x» a la variable que representa a la estimación del número de cuños de la acuñación, el valor más probable, «x_m», para el ejemplo que nos ocupa deberá ser igual o superior a 7, cantidad de los realmente identificados en la muestra, pero puede de principio crecer sin límite; o sea:

$$7 \leqq x_m < \infty$$

Conviene observar que de origen el número de cuños de una acuñación es una «constante»; sin embargo, hablamos de «variable» en el sentido de un valor de estimación que sustituye al valor exacto desconocido, al que pretendemos aproximarnos al máximo.

También debe tenerse en cuenta que el problema planteado es más complejo cuando al mismo se asocian incidencias especiales, tales como cuando el número de monedas acuñadas por cuño es sensiblemente distinto de uno a otro, o cuando se hayan practicado actuaciones de selección de manera que no todos los cuños participan con igual probabilidad en la formación de las muestras. Sin embargo, conviene primero afrontar el problema considerando su alternativa más simple, luego pueden apreciarse desviaciones y el razonamiento numismático puede aclararnos las posibles causas especiales y, eventualmente, nuevas contribuciones de investigación estadística pueden colaborar en el esclarecimiento de los fenómenos que ocurrieron.

Así pues, siguiendo el mismo proceder de los demás autores conviene precisar las hipótesis del problema simple cuya solución presentamos y las cuales son:

1.ª Que con cada uno de los cuños de la acuñación se han emitido cantidades sensiblemente iguales de monedas.

2.ª Que la cantidad de monedas acuñadas por cuño es muy grande, de manera que al separar una moneda o muestra de monedas de la población total, el surtido de la población restante prácticamente nos ha variado, y

3.ª Que la muestra o las muestras han sido formadas al azar.

Cuando se cumplan estas condiciones y sólo a título de expresión simplificada, diremos que se trata de una muestra o de muestras «normales», tanto en cuanto se refiere a su acuñación como en cuanto a la formación de la muestra.

También observamos que en esta comunicación limitamos el problema a una sola de las caras de la moneda; o sea, a sólo los cuños de anverso o a sólo los cuños de reverso, pero no a las posibles combinaciones de ambos.

El problema, según ha sido enunciado es tal como realmente interesa al numismático; pero por razones lógicas conviene resolver primero el problema directo, que puede ser formulado como sigue: conocida con certeza la cantidad «n» de los cuños empleados en una acuñación normal y tomada una muestra al azar de «c» monedas, determinar la estadística del número «y» de cuños distintos identificados dentro de la muestra, cada uno de los cuales puede haber aparecido una o más veces.

Por último, antes de entrar en la resolución de la cuestión, advertimos que su enfoque tiene en cuenta las cantidades pequeñas tanto para el número de cuños de la acuñación como para los tamaños de las muestras, como corresponde a los hallazgos de monedas antiguas; pero el razonamiento general es universalmente aplicable a todas las cantidades.

2) Estadística del número de cuños distintos

Esta estadística, que corresponde al problema directo, nos dice cuál es la probabilidad p(y) de que al sacar una muestra de «c» monedas de una acuñación normal en la que se emplearon «n» cuños, resulten «y» cuños identificados distintos. Evidentemente se deberá cumplir una u otra de las siguientes condiciones para el campo de variación de «y»:

$$\left.\begin{array}{lll} 1 \eqslantless y \leq c, & \text{si} & c \leq n \\ 1 \eqslantless y \leq n, & \text{si} & c \eqslantgtr n \end{array}\right\} \qquad (2.01)$$

El análisis combinatorio nos permite contemplar la extensión del fenómeno estadístico de la formación de las posibles muestras. Mientras que un observador distingue sólo las agrupaciones en cuanto a los cuños distintos aparecidos o su número sin tener en cuenta orden alguno, la realidad de la formación de una muestra contempla además el orden con el cual los cuños se han integrado en la muestra. El observador distingue las agrupaciones según las combinaciones, mientras que las posibilidades de formación son según las variaciones; ambas con repetición.

No todas las combinaciones comportan igual número de ordenaciones, resultando por lo tanto que no son equiprobables. A título de ejemplo veamos lo que ocurre con tres combinaciones distintas de muestras de 3 monedas:

1) Sea una muestra con dos cuños, 2 «a» + «b», las posibilidades de su formación son 3:

   a — a — b
   a — b — a
   b — a — a

2) Sea una muestra con tres cuños, «a» + «b» + «c», las posibilidades de su formación son 6:

a — b — c	a — c — b
b — c — a	b — a — c
c — a — b	c — b — a

3) Mientras que para una muestra con un solo cuño existe sólo una posibilidad de formación:

a — a — a

El número de las posibles ordenaciones equiprobables de los cuños dentro de la muestra está dado por el número de las «variaciones con repetición» de «n» elementos de orden «c» (tamaño de la muestra), y su valor es:

$$VR\ (n,c) = n^c \qquad (2.02)$$

Aun cuando las acuñaciones y las muestras sean de pequeña embergadura, la cantidad resultante de la aplicación de la expresión anterior, número 2.02, se hace tan grande que puede calificarse de «astronómica»; por ejemplo para el caso de una muestra de 20 monedas de una acuñación de 15 cuños se alcanza una cantidad representada por un número formado de 24 cifras significativas ($3{,}325 \cdot 10^{23}$).

Pero el principal problema no reside en la magnitud de las cantidades sino en la determinación de la cantidad exacta de los casos favorables a la identificación de «y» cuños distintos mediante una simple expresión algebraica. El resultado de los estudios llevados por este camino no han sido positivos; de haberlo sido se habría obtenido una expresión de probabilidad como resultante del cociente entre los casos favorables y el total de casos.

Sin embargo nos queda el recurso iterativo de la simulación de la variación de la cantidad de los cuños identificados al formar progresivamente la muestra. Este procedimiento es el que finalmente se ha utilizado el cual presentamos a continación.

Supongamos la acuñación con «n» cuños, podemos hablar pues de la posibilidad de que al designar al azar una moneda de la población total de la acuñación nos salga un cuño concreto, y tal posibilidad en expresión de probabilidad vale:

$$\theta = 1/n \qquad (2.03)$$

Cuando se toma la primera moneda al iniciar la construcción de la muestra tenemos la certeza (probabilidad del 100 %) de que en la muestra identificamos 1 cuño, o sea:

$$p(y_1 = 1) = 100\ \% \qquad (2.04)$$

Cuando se toma la segunda moneda para integrarla en la muestra, se tienen dos posibilidades finales: de que nos salga repetida la primera, o bien de que nos salga otro cuño distinto; en el primer caso la muestra continuará identificando un solo cuño, en el segundo son dos los cuños identificados; sus probabilidades valdrán:

$$\begin{aligned} p(y_2 = 2) &= 1\ .\ (1 - \theta) \\ p(y_2 = 1) &= 1\ .\ \theta \end{aligned} \qquad (2.05)$$

Al tomar la tercera moneda el número de los cuños distintos de la muestra anterior podrá mantenerse igual o aumentar en uno más, de acuerdo con las siguientes probabilidades condicionadas:

$$\begin{aligned} p(y_3 = 1/y_2 = 1) &= \theta \\ p(y_3 = 2/y_2 = 1) &= 1 - \theta \\ p(y_3 = 2/y_2 = 2) &= 2\theta \\ p(y_3 = 3/y_2 = 2) &= 1 - 2\theta \end{aligned} \qquad (2.06)$$

de donde resulta:

$$\begin{aligned} p(y_3 = 1) &= \theta^2 \\ p(y_3 = 2) &= \theta \cdot (1 - \theta) + (1 - \theta) \cdot 2\theta \\ p(y_3 = 3) &= (1 - \theta) \cdot (1 - 2\theta) \end{aligned} \qquad (2.07)$$

Este procedimiento del cálculo apriorístico de la probabilidad se puede aplicar iterativamente paso a paso, hasta alcanzar el tamaño «c» de la muestra. Después de cada paso de iteración la distribución que nos interesa alcanza un estado «i» que se puede deducir del inmediato anterior «i-l»; la expresión del paso de uno a otro estado está dada por la siguiente expresión (en la que se ha trasladado el subíndice fuera del paréntesis):

$$p_i(y) = p_{i-1}(y - 1) \cdot (1 - i\theta) + p_{i-1}(y) \cdot i\theta \qquad (2.08)$$

La estadística alcanzada al término de un estado de formación de la muestra constituye un vector de «c» elementos que podemos expresar como sigue:

$$p_i = [p_i(1), p_i(2), p_i(3), \ldots, p_i(i), 0, \ldots, 0] \qquad (2.09)$$

De acuerdo con el teorema de la probabilidad total, la suma de los «c» elementos que constituyen el vector del estado «i» vale siempre la unidad:

$$\Sigma p_i(y) = 1 \qquad (2.10)$$

Nos hallamos ante un proceso estocástico de cadenas de Markov y como tal proceso podemos establecer la matriz de las probabilidades de transición para pasar de un estado al siguiente. Luego mediante el algoritmo matricial se podrá deducir el estado exacto para cualquier tamaño de la muestra.

La matriz de las probabilidades de transición, T^1_n, es de orden «n» (n filas por n columnas), y para un paso simple es:

$$T^1_n = \left| \begin{array}{ccccccc} \theta & (1-\theta) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2\theta & (1-2\theta) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\theta & (1-3\theta) & \ldots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (n-1)\theta & \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array} \right| \qquad (2.11)$$

A cada uno de los elementos de la matriz los designamos por:

$$\left. \begin{array}{l} t_n(j, k) \\ j\text{: número de orden de la fila en la matriz} \\ k\text{: número de orden de la columna en ídem} \end{array} \right\} \qquad (2.12)$$

así pues tenemos:

$$\begin{aligned} t_n(1, 2) &= (1 - \theta) \\ t_n(2, 2) &= 2\theta \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Cuando se quiera pasar de un estado a otro, de la estadística del número de cuños distintos, después de haber añadido al primero «m» monedas más a la muestra, bastará aplicar «m» veces la matriz de las probabilidades de transición. O sea, si se quiere pasar del vector p_i al vector p_{i+m}, recurriremos a la siguiente expresión matricial:

$$p_{i+m} = p_i \cdot T_n^m \tag{2.13}$$

De la simple observación de la matriz de las probabilidades de transición elemental, n.º 2.11, se deduce que nos hallamos ante un proceso markoviano absorbente, pues al incrementar el número de pasos, que equivale a aumentar el tamaño de la muestra, la masa probabilística se concentra en el último elemento de la matriz (última fila, última columna); en efecto, cuando «y» alcanza el valor «n» ya no se sale de esta situación, pues $t_n(n,n) = 1$. Esto equivale a decir que cuando la muestra es muy grande quedan identificados todos los cuños.

Pasemos ahora a exponer un ejemplo sencillo de determinación de la estadística del número de cuños distintos que nos permita comprobar prácticamente el procedimiento expuesto. Sea el caso de una acuñación en la que se hayan empleado n = 5 cuños; pasemos a determinar las estadísticas correspondientes a las muestras de hasta c = 10 monedas.

La probabilidad elemental de que al tomar una moneda de la población total salga un cuño concreto vale:

$$\theta = 1/5 = 0{,}2$$

La matriz elemental (correspondiente a 1 paso) de las probabilidades de transición es:

$$T_5^1 = \begin{vmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 1{,}0 \end{vmatrix}$$

A partir de la matriz elemental se puede calcular la correspondiente a dos pasos: $T_5^2 = T_5^1 \cdot T_5^1$; luego se puede calcular la correspondiente a 4 pasos, y sucesivamente las de 8, 16, ..., y con ellas alcanzar cualquier número de pasos. Por ejemplo, para alcanzar el tamaño de muestra C = 10 se puede partir del estado 1 y realizar 9 pasos, que se pueden aplicar como sigue:

$$p_{10} = p_1 \cdot T_5^9 = p_1 \cdot T_5^8 \cdot T_5^1$$

El desarrollo progresivo de los cálculos nos da lo siguiente:

$$T_5^2 = (T_5^1)^2 = \begin{vmatrix} 0{,}04 & 0{,}48 & 0{,}48 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}16 & 0{,}60 & 0{,}24 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}36 & 0{,}56 & 0{,}08 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}64 & 0{,}36 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 1{,}00 \end{vmatrix}$$

$$T_5^4 = (T_5^2)^2 = \begin{vmatrix} 0{,}0016 & 0{,}0960 & 0{,}4800 & 0{,}3840 & 0{,}0384 \\ 0{,}0000 & 0{,}0256 & 0{,}3120 & 0{,}5280 & 0{,}1344 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}1296 & 0{,}5600 & 0{,}3104 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}4096 & 0{,}5904 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 1{,}0000 \end{vmatrix}$$

$$T_5^8 = \begin{vmatrix} 0{,}000000 & 0{,}002611 & 0{,}092929 & 0{,}477390 & 0{,}427070 \\ 0{,}0 & 0{,}000655 & 0{,}048422 & 0{,}404506 & 0{,}546417 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}016796 & 0{,}301952 & 0{,}681252 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}167772 & 0{,}832228 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 1{,}000000 \end{vmatrix}$$

El vector columna correspondiente al estado 1.º, multiplicado por la matriz de las probabilidades de transición de 8 pasos, T_5^8, nos conduce al estado 9.º:

$$\begin{vmatrix} 100\ \% \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0{,}000000 & 0{,}002611 & 0{,}092929 & 0{,}477390 & 0{,}427070 \\ 0{,}0 & 0{,}000655 & 0{,}048422 & 0{,}404506 & 0{,}546417 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}016796 & 0{,}301952 & 0{,}681252 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}167772 & 0{,}832228 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 1{,}000000 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}0000\ \% \\ 0{,}2611 \\ 9{,}2929 \\ 47{,}7390 \\ 42{,}7070 \end{vmatrix}$$

Del vector columna correspondiente al estado 9.º podemos pasar al estado 10.º multiplicándolo por T_5^1:

$$\begin{vmatrix} 0{,}0\ \ \% \\ 0{,}2611 \\ 9{,}2929 \\ 47{,}7390 \\ 42{,}7070 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 1{,}0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}0000\ \% \\ 0{,}1044 \\ 5{,}7324 \\ 41{,}9084 \\ 52{,}2548 \end{vmatrix}$$

Con lo cual podemos comprobar que en las muestras de 10 monedas corresponde el máximo de probabilidad para $y = 5$ cuños con un 52,25 %, mientras que para una muestra de 9 monedas el máximo corresponde a 4 cuños con un 47,74 %.

Las estadísticas resultantes para los distintos tamaños de muestra, del ejemplo que acabamos de desarrollar se representan gráficamente en la figura número 1.

También, para comprobar la rapidez absorbente del proceso estocástico en el ejemplo en cuestión, se ha calculado la estadística correspondiente a una muestra de $c = 33$ monedas, resultando que prácticamente se identifican los 5 cuños al 100 % (exactamente el 99,6830 %).

Aun cuando acabamos de resolver el problema directo con exactitud matemática nos queda la insatisfacción de no haber podido alcanzar una fórmula algebraica que proporcionara directamente el resultado sin la necesidad de realizar sucesivas iteraciones de cálculo. Para resolver un caso concreto nos encontramos con un significativo volumen de cálculo, para el cual se debe recurrir, en la mayoría de los casos, al «ordenador». Como solución genérica cabría la construcción de unas tablas o ábacos, mediante el auxilio de un ordenador, que con las correspondientes entradas de datos se pudieran leer directamente las soluciones.

3) Valor probable para el número de cuños de una acuñación

Para el problema inverso, o sea, para la estimación del número de cuños empleados en una acuñación normal a través de las muestras en las que se identifican varios cuños distintos, aún menos podemos presentar una fórmula algebraica o similar; no nos cabe otra alternativa que la de efectuar supuestas hipótesis, desarrollar tales hipótesis, comparar las probabilidades respectivas

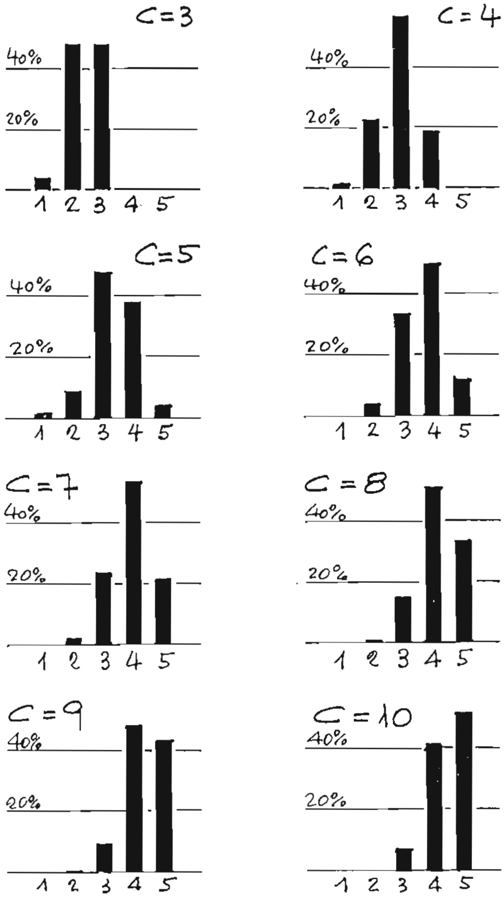

FIGURA Nº1 ESTADISTICAS DEL NRO. DE CUÑOS DISTINTOS EN LA MUESTRA, $n=5$ PARA VARIOS TAMAÑOS MUESTRA "C".

de haber obtenido la muestra o las muestras a nuestro alcance y seleccionar la hipótesis que ostente la máxima probabilidad; naturalmente conviene recorrer adecuadamente el campo de variación de las posibles hipótesis.

La selección de la hipótesis más probable se puede hacer recurriendo a la fórmula de Bayes, en la cual es posible asociar probabilidades a priori procedentes de otras fuentes de información.

Designemos por «x_r», ($r = 1, 2, \ldots, i, \ldots, m$), a cada una de las «m» hipótesis propuestas como estimación del número de cuños. Sean $p(x_i)$ las respectivas probabilidades a priori, de otras fuentes de información. Y sean $p(d/x_i)$ las probabilidades condicionadas de la identificación de «d» cuños en la muestra, si las hipótesis «x_i» es cierta (observamos que la «d» sustituye a la «y» del apartado anterior, con la diferencia de que ahora es una «constante» mientras que en el problema directo era una «variable»). La fórmula de Bayes nos dice:

$$p(x_i/d) = \frac{p(x_i) \cdot p(d/x_i)}{\sum_{r=1}^{m} p(x_r) \cdot p(d/x_r)} \tag{3.01}$$

En la mayoría de los casos, sin embargo, se deberá solucionar el problema sin aportación a priori de informaciones externas; entonces basta considerar que todas las hipótesis a priori son igualmente probables; haciendo las probabilidades a priori todas iguales a la unidad, resulta:

$$p(x_i/d) = \frac{p(d/x_i)}{\sum_{r=1}^{m} p(d/x_r)} \tag{3.02}$$

Cada uno de los elementos $p(d/x_r)$ que constituyen el segundo miembro de la fórmula anterior se puede calcular mediante el procedimiento expuesto en el apartado anterior que resuelve el problema directo; como no se consiguió una deseada expresión de solución directa, la tarea resulta laboriosa por su volumen de cálculo y en la práctica se hace necesario la disponibilidad de medios adecuados.

A continuación y sólo a título de simplificación, cambiamos la notación de la expresión n.º 3.02 por la siguiente:

$$p_d(x) = \frac{p(d/x)}{\Sigma p(d/x)} \tag{3.03}$$

Como el denominador del segundo miembro de esta fórmula es constante, existe proporcionalidad entre los otros dos elementos: «$p_d(x)$» y «$p(d/x)$». El primero corresponde a la probabilidad de que, habiéndose identificado «d» cuños en la muestra, la hipótesis de «x» cuños para la acuñación, sea cierta; el segundo, «$p(y=d/x)$», es la probabilidad de que, en una acuñación con «x» cuños, identifiquemos en la muestra «d» cuños distintos; naturalmente, todo ello considerando constante el tamaño de «c» monedas en la muestra.

De la proporcionalidad anterior se deduce la siguiente correspondencia entre valores de máxima probabilidad:

$$\text{máx } [p_d(x)] = \text{máx } [p(d/x)] \tag{3.04}$$

Así pues, resuelto el problema directo dentro de un campo apropiado de variación de «x» (equivalente a la «n» del apartado anterior, n.º 2), podremos seleccionar el valor más elevado de los «p (d/x)», cuya «x» resulta ser la hipótesis más probable.

En toda estimación estadística corresponde establecer unos límites de precisión para que se tenga idea de la posible desviación de la solución con respecto al desconocido valor real. Dado el carácter ilimitado de la extensión de las posibles hipótesis, no podemos hablar de una masa de población total concreta ni, por lo tanto, delimitar proporciones de la misma denominadas coeficientes de confianza. Sin embargo podemos hablar de unos límites establecidos indirectamente, uno inferior «x_{li}», y otro superior, «x_{ls}», véase la figura n.º 2; el límite inferior, «x_{li}» se establece tomando el valor más pequeño

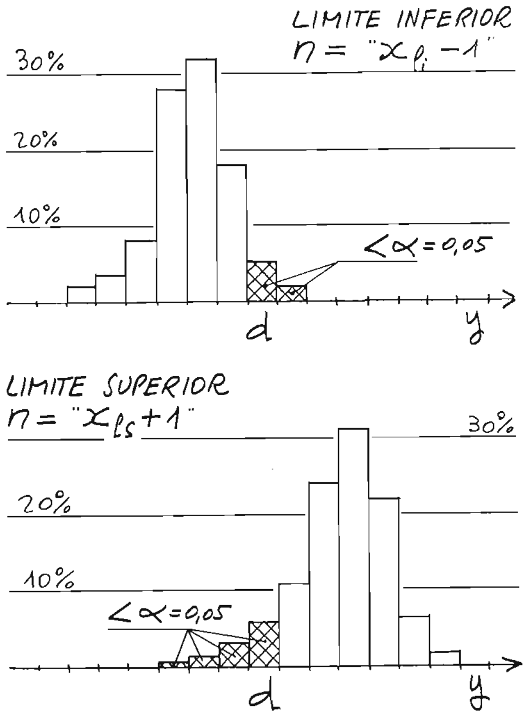

FIGURA nº2 ESTADISTICAS DEL NUMERO DE CUÑOS DISTINTOS "y" PARA LAS ESTIMACIONES DE "n" INMEDIATAS AL LIMITE

con el cual la probabilidad de obtener «d o más cuños» distintos en la muestra no sea inferior a una proporción suficientemente pequeña, «α», previamente establecida; esto quiere decir que para el valor inmediato inferior «x_{li}-l», la probabilidad de obtener «d o más cuños» es inferior a la proporción «α» considerada de difícil realización práctica; generalmente se toma para esta proporción el valor de $\alpha = 0{,}05$:

$$\Sigma p[(y \geq d)/(x_{li} - 1)] < \alpha \qquad (3.05)$$

Mutatis mutandis hacemos para el límite superior, «x_{ls}», tomando el valor más grande tal que la probabilidad de obtener «d o menos cuños» distintos en la muestra no sea inferior a la proporción «α»; o sea que para el valor inmediato superior «x_{ls}+1», se ha de cumplir

$$\Sigma p[(y \leq d)/(x_{ls} + 1)] < \alpha \qquad (3.06)$$

En el siguiente apartado se expone el desarrollo de una aplicación referida a un hallazgo de monedas antiguas, con el cual se puede seguir de nuevo el razonamiento con la práctica del método expuesto.

Sólo a título de orientación indicamos que, si se dispusiera de más de una muestra de monedas de una misma acuñación, cada muestra con su respectiva cantidad de monedas y su número de identificación de cuños distintos, la precisión en la estimación del número de cuños aumentaría. En semejantes circunstancias, la prueba de cada hipótesis implica la condición conjunta que resulta de involucrar el cumplimiento simultáneo de las condiciones particulares de cada muestra, en cuanto a la identificación del número de cuños distintos. Además nos queda el recurso simple de que se pueden reunir todas las monedas de las muestras para formar una sola muestra más potente y resolver el problema con sólo la muestra global.

Para terminar señalamos que no se puede hacer previsión alguna cuando todas las monedas de la muestra son de distinto cuño, o sea cuando $d = c$; entonces la estimación de «n» tiende a infinito, la muestra es sumamente pobre.

4) Aplicación sobre unos hallazgos de denarios de Beligio

Sobre algunos trabajos y estudios numismáticos surgen animados coloquios sobre las causas en las diferentes proporciones del número de cuños distintos observados en los «tesorillos» de monedas antiguas; de ellos resultan especulaciones diversas sobre los acontecimientos sociales, económicos y técnicos que puedan haber ocurrido. Tenemos un ejemplo nacido a raíz del trabajo de Villaronga (2), sobre un hallazgo de denarios de Beligio.

Consideramos que la elaboración estadística de los datos observados en las muestras es muy necesario, especialmente cuando se trata de hallazgos de monedas antiguas, donde la cantidad de cuños de la acuñación puede ser limitada a valores pequeños.

El coeficiente que resulta de dividir el tamaño de la muestra por el respectivo número de cuños distintos dentro de la muestra, constituye ya de principio una información estadística ($r = c/d$); pero debe tenerse en cuenta que este coeficiente es muy variable cuando el número de cuños es reducido. Por ejemplo, si suponemos una acuñación con sólo 10 troqueles y tomamos al azar muestras de 100 y de 200 monedas, saldrán en ambas (prácticamente en el 100 % de los casos) 10 cuños, con lo que la proporción «r» se doblará de uno a otro caso ($r = 10$ y $r = 20$).

Pasemos ahora a nuestra aplicación. Del referido trabajo de Villaronga se toman los siguientes datos:

1)	Denarios Beligio I:	22	monedas en la muestra,
		12	cuños de anverso,
		11	cuños de reverso.
2)	Denarios Beligio II:	55	monedas en la muestra,
		8	cuños de anverso,
		7	cuños de reverso.
3)	Denarios Beligio III:	143	monedas en la muestra,
		8	cuños de anverso,
		12	cuños de reverso.

Para la muestra 1) de 22 monedas, se procedió al cálculo de las estadísticas directas, «número de cuños distintos en la muestra», considerando que las sucesivas hipótesis de que «x», «número de cuños de la acuñación», fueran

12, luego 13, después 14, etc... (hasta 40, que de principio se estimó suficiente); para cada hipótesis se calculó la correspondiente «θ», siendo esta sucesivamente: 1/12 = 0,083333, 1/13 = 0,076923, 1/4 = 0,071429, etc.; para cada caso se construyó la matriz de las probabilidades de transición de un paso, T^1_x (véase la expresión n.° 2.11) y después, multiplicando la respectiva matriz 21 veces (22-1 = 21 pasos) se alcanza el vector columna que contiene la correspondiente estadística. De hecho, mediante comprobaciones automáticas introducidas en el medio de cálculo, sólo fue necesario llegar hasta la hipótesis de x = 26 cuños.

De cada una de las estadísticas calculadas se ha tomado el valor de la probabilidad de identificar «d» cuños (12 cuños) y el valor del acumulado de la misma probabilidad desde «l» hasta «d» (desde 1 hasta 12). Los resultados se han recogido en la tabla n.° 1; por ejemplo para n = 12 la probabilidad de identificar y = 12 cuños en la muestra es de 9,44 % (el resto de los casos, el 90,56 %, identifican menor número de cuños) y el acumulado desde y = 1 hasta 12 es, naturalmente, el 100 % (dado que se cubre todo el campo de variación). Cuando n = 13 la probabilidad de identificar y = 12 cuños es el 21,10 %, el acumulado de 1 a 12 vale el 95,64 % y sólo el 4,36 % (100-95,64 %) corresponde a valores superiores (y = 13 cuños). Así sucesivamente podríamos explicar cada línea de la tabla, hasta la hipótesis de n = 26 troqueles, donde la probabilidad de encontrar 12 cuños en la muestra es sólo del 3,74 % y el acumulado de probabilidad para encontrar de 1 a 12 cuños es de 4,71 %, inferior al valor α = 5 %; esto quiere decir que en el 95,29 % de los casos (100-4,71 %) saldrían en la muestra más de 12 cuños, lo cual se considera que prácticamente no puede suceder.

TABLA NÚM. 1
($c = 22$; $d = 12$)

x	$p_x(y = d)$	$\Sigma p_x(y \leq d)$	x	$p_x(y = d)$	$\Sigma p_x(y \leq d)$
11	—		21	12,49 %	17,68 %
12	9,44 %	100,00 %	22	9,87	13,54
13	21,10	95,64	23	7,76	10,37
14	28,93	86,29	24	6.09	7,95
15	31,98	73,98	25	4.77	6.11
16	30,65	61,00	26	3,74	4,71
17	27,46	48,92	27	n. d.	n. d.
18	23,43	38,48	28	»	»
19	19,90	29,90	29	»	»
20	15,66	23,04	30	»	»

(n. d.: valores no disponibles)

De la anterior tabla n.° 1 se toma el valor que ostenta la máxima probabilidad y, de acuerdo con la expresión n.° 3.04, se tiene x_m = 15 cuños, como hipótesis más probable para el número de troqueles de la acuñación (probabilidad relativa del 31,98 %); pero obsérvase como es muy poco diferente de la probabilidad relativa de la hipótesis de 16 cuños (30,65 %). Con los valores de la tabla n.° 1 se ha construido el gráfico de variación de la probabilidad condicionada (probabilidades relativas) que se muestra en la figura n.° 3.

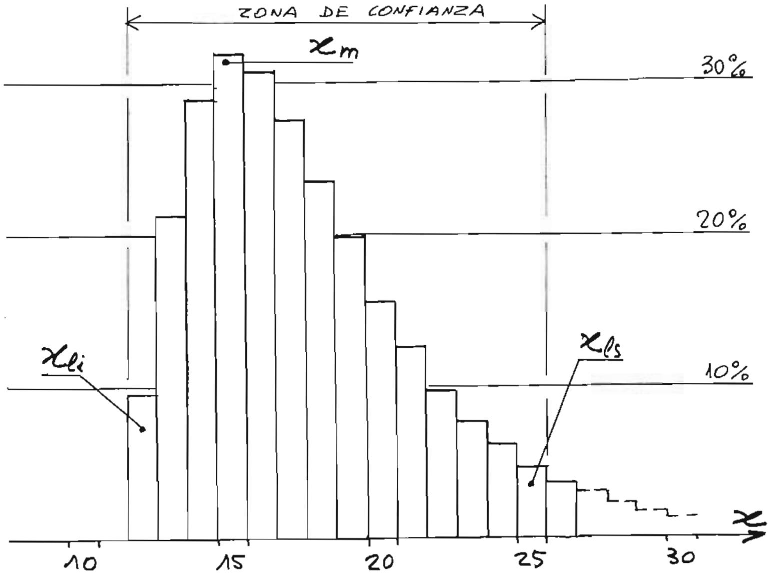

FIGURA nº 3 PROBABILIDADES RELATIVAS DE LAS HIPOTESIS DEL NRO. DE TROQUELES "x" PARA QUE RESULTE LA MUESTRA: C=22, d=12

Los valores límite para establecer una masa de confianza de la estimación, se han tomado aplicando el criterio de las expresiones n.º 3.05 y n.º 3.06. El mayor valor que cumple la primera es el de $x_{li} = 12$ cuños, en efecto:

$$p[(y \geq 12)/11] = 0 \quad < 0{,}05$$
$$p[(y \geq 12)/12] = 0{,}0944 \not< 0{,}05$$

El menor valor que cumple la expresión n.º 3.06 es el de $x_{ls} = 25$ cuños, en efecto:

$$p[(y \leq 12)/26] = 0{,}0471 < 0{,}05$$
$$p[(y \leq 12)/25] = 0{,}0611 \not< 0{,}05$$

En conclusión se puede decir que para la muestra 1), con referencia a los cuños de anverso, el resultado de la investigación estadística es como sigue:

valor límite inferior:	12 cuños
valor más probable:	15 cuños
valor límite superior:	25 cuños

Las distribuciones del número «y» de cuños identificados en la muestra de 22 monedas, para cada uno de los valores anteriores, se presentan en la tabla n.º 2, y luego, gráficamente en la figura n.º 4.

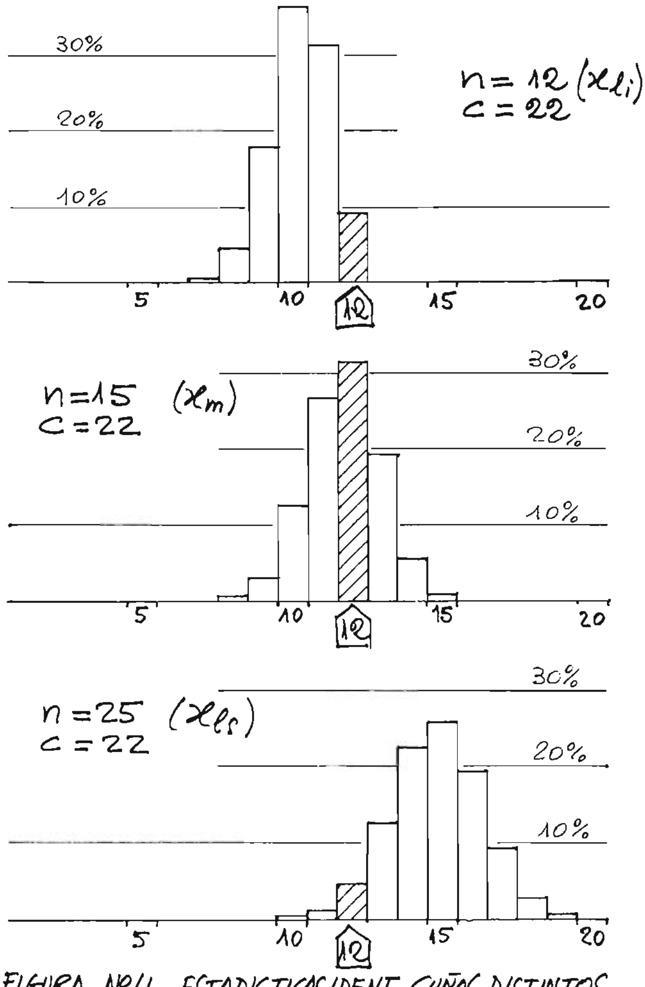

FIGURA Nº4 ESTADISTICAS IDENT. CUÑOS DISTINTOS

TABLA NÚM. 2

(c = 22 monedas)

y	n = 12 $p(y)$	n = 12 $\Sigma p(y)$	n = 15 $p(y)$	n = 15 $\Sigma p(y)$	n = 25 $p(y)$	n = 25 $\Sigma p(y)$	y
1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1
2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	2
3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3
4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	4
5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	5
6	0,02	0,02	0,0	0,0	0,0	0,0	6
7	0,44	0,46	0,03	0,03	0,0	0,0	7
8	4,13	4,39	0,40	0,43	0,0	0,0	8
9	17,96	22,25	3,01	3,44	0,02	0,02	9
10	36,23	58,38	12,16	15,60	0,17	0,19	10
11	31,78	90,56	26,67	42,28	1,15	1,34	11
12	9,44	100,00	31,70	73,98	4,77	6,11	12
13	—	—	19,66	93,64	12,82	18,92	13
14	—	—	5,76	99,40	22,53	41,45	14
15	—	—	0,60	100,00	25,99	67,44	15
16	—	—	—	—	19,59	87,02	16
17	—	—	—	—	9,50	96,53	17
18	—	—	—	—	2,89	99,42	18
19	—	—	—	—	0,53	99,95	19
20	—	—	—	—	0,05	100,00	20

El mismo tratamiento se ha realizado para los demás datos del antes mencionado hallazgo de Denarios de Beligio. El resultado completo de la investigación estadística se recopila en la tabla n.º 3:

TABLA NÚM. 3

ESTIMACION DEL NUMERO DE CUÑOS DE LOS DENARIOS DE BELIGIO
(anverso-reverso)

D a t o s			Valores de la estimación		
	Número monedas	Número cuños	Límite inferior	Más probable	Límite superior
Beligio I	22	A 12 R 11	12 11	15 13	25 21
Beligio II	55	A 8 R 7	8 7	8 7	8 7
Beligio III	143	A 8 R 12	8 12	8 12	8 12

De los resultados obtenidos se observa que se trata de acuñaciones con series de cuños muy limitadas; las muestras Beligio II y Beligio III son de suficiente tamaño para identificar prácticamente todos los cuños que se emplearon en la acuñación, con la seguridad casi absoluta del 100 %. Para la muestra Beligio I, por el contrario, es más probable la existencia de otros cuños no identificados en la muestra, aunque cabría también la menor posibilidad de que se hubieran identificado todos ellos.

Nos parece bien aquí, antes de concluir el trabajo, decir que la estadística nunca proporciona resultados matemáticos, pero sí proporciona una buena orientación sobre el alcance de las posibilidades de aquéllos. Bajo este aspecto es el que debe ser aceptada la aportación de este estudio para la Numismática.